INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES
À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

Juin 1987. — Option MATHÉMATIQUES

TROISIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 heures

Dans ce problème on supposera que les calculatrices ont une précision infinie. Toutefois, tout calcul avec des valeurs approchées donnera lieu à un encadrement ou à un calcul d'erreur. Les résultats seront donnés à 5.10^{-4} près (meilleure approximation à 10^{-8} près).

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $x \longrightarrow \dfrac{e^{0,08\,(11\,x - x^2)} - 1}{2}$.

I

Le but de cette partie est l'étude et le tracé de cette fonction sur [0,11].

I.1. Prouver que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{11}{2}$. On étudiera donc f sur $\left[0, \dfrac{11}{2}\right]$.

I.2. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f'''(x)$. (On mettra $(11 - 2x)$ en facteur dans $f'''(x)$).

I.3. Trouver le signe de $f'''(x)$ sur $\left[0, \dfrac{11}{2}\right]$.

I.4. Étudier les variations de f. Déterminer les points d'inflexion.

I.5. On veut résoudre $f'(x) = 1$. Prouver que cette équation a deux solutions α_1 et α_2 sur $\left[0, \dfrac{11}{2}\right]$ telles que : $1.4 < \alpha_1 < 1,5$ et $4.2 < \alpha_2 < 4.3$.

Pour obtenir une meilleure approximation de α_1 et α_2, appliquer pour chaque solution la méthode de Newton (en 1,5 et 4,2) (méthode de la tangente) et la méthode de la corde (méthode des proportions) en justifiant à chaque fois le nouvel encadrement.

I.6. Tracer la courbe représentative de f sur [0,11].

On fera apparaître les points intervenant dans cette partie, leur tangente et leur symétrique. (Il est inutile de calculer d'autres points.)

II

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 1,\ u_n = f(u_{n-1}),\ n \geqslant 1 \text{ et } v_n = \frac{u_n}{(0,44)^n} ;\ n \in \mathbb{N}.$$

II.1. Dresser le tableau de variation de f''' sur [0,1] et celui de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x associe $f(x) - x$ sur [0,1].

II.2. Prouver que (u_n) est décroissante à termes positifs et converge vers 0.

II.3. Prouver que si $x \in [0; 0,1]$, $|f(x)| < 0,46|x|$.

Trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in [0; 0,1]$ (on calculera $(u_0, u_1\ u_2, \ldots, u_{n_0})$.
Trouver M pour que $\forall\ n \in \mathbb{N} : u_n < M(0,46)^n$.

II.4. Prouver que (v_n) est croissante. Prouver que si $x \in [0,1]$ alors : $|f(x) - 0,44\,x| < 0,2\,x^2$. Montrer alors que (v_n) est convergente. (On écrira $v_n = v_0 + \sum_{i=1}^{n} (v_i - v_{i-1})$ et on majorera $(v_i - v_{i-1})$.)

II.5. Trouver n_1 tel que, si l est la limite de (v_n), on ait $|v_{n_1} - l| < 10^{-2}$. Déduire le meilleur encadrement possible de l obtenu à partir de v_{n_1}.

Tournez la page S. V. P.

ECOLE NATIONALE de l'ADMINISTRATION ECONOMIQUE
M'-Math 3

III

Le but de cette partie est de calculer $A = \int_0^{11} f(x)\,dx$.

III.1. Prouver que $A = \int_{\frac{11}{2}}^{11} 2f(x)\,dx$.

On pose $B = \int_{\frac{11}{2}}^{8,6} 2f(x)\,dx$ et $C = \int_{8,6}^{11} 2f(x)\,dx$.

III. 2. Par un changement de variable convenable montrer que :

$B = e^{2,42}\int_0^{\alpha} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{0,08}}\,dx - 3,1$ pour une valeur α que l'on déterminera.

(Par la suite on gardera la valeur exacte de α.)

En utilisant un développement de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 de e^x au voisinage de 0, trouver un développement limité $P(x)$ de e^{-x^2} à l'ordre 10 au voisinage de 0 et une majoration de l'erreur commise en remplaçant e^{-x^2} par $P(x)$ dans B. Puis déterminer le sens de l'erreur. Donner enfin un encadrement de B.

III.3. Pour calculer C on utilise la méthode de Simpson qui approche l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ par $\left[f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\left(\frac{b-a}{6}\right)$. On admettra que dans le cas de la fonction f, l'erreur qui en résulte est inférieure à $\frac{|b-a|^5}{2\,500}$.

On considère alors une subdivision de [8,6; 11] x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, ..., $x_n = x_0 + nh$ et on applique cette méthode sur chaque $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$. Trouver h pour que l'erreur commise sur le calcul de C soit inférieure à $2{,}5.\ 10^{-4}$. Trouver alors un encadrement de C.

En déduire un encadrement de A.

• • •